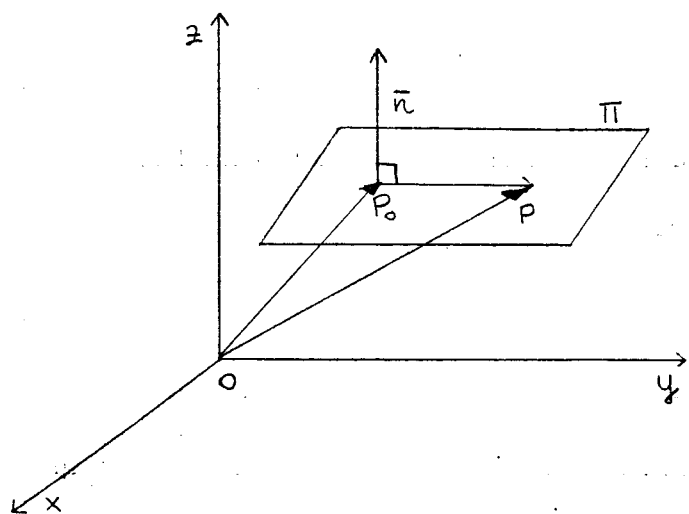


GEOMETRIA ANALITICA NELLO SPAZIO

Equazione di un piano nello spazio



Sia Π un piano.

Fissiamo:

$$\begin{cases} P_0(x_0, y_0, z_0) \in \Pi \text{ (punto sul piano)} \\ \vec{n}(a, b, c) \perp \Pi \text{ (vettore non nullo} \\ \perp \text{ al piano} \Rightarrow \vec{n} \text{ individua le} \\ \text{"giaciture" di } \Pi) \end{cases}$$

Dato un punto $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $P \in \Pi \Leftrightarrow \overline{P_0P} \perp \vec{n} \Leftrightarrow (P - P_0) \cdot \vec{n} = 0$

Dato che $P - P_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, si ha che:

$$P(x, y, z) \in \Pi \Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = 0$$

Posto $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$, l'ultima eq. diventa:

$$P(x, y, z) \in \Pi \Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$$

$ax + by + cz + d = 0$ è l'eq. cartesiana del piano Π (eq. lineare)

(a, b, c) non è mai la terna nulla, cioè almeno uno dei tre numeri a, b, c è $\neq 0$.

Possiamo anche dire che, data un'eq. del tipo $ax + by + cz + d = 0$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

$a \neq 0$, oppure $b \neq 0$, oppure $c \neq 0$, tale eq. è sempre un'eq. di un opportuno piano Π

che è $\perp$ al vettore $\vec{n} = (a, b, c)$ e che passa per un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ tale che

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0.$$

Riassumendo, valgono i seguenti fatti:

- Ogni piano dello spazio è l'insieme delle soluzioni di un'eq. lineare in tre incognite del tipo $ax + by + cz + d = 0$; i coefficienti a, b, c di questa eq. sono le coordinate di un vettore $\vec{n}$ normale al piano Π .
- Viceversa, ogni eq. lineare del tipo $ax + by + cz + d = 0$ è associata a un opportuno piano Π dello spazio, avente giaciture individuate da $\vec{n} = (a, b, c)$.

ad esempio

Se $\sqrt{b} \neq 0$, $y_0 = \frac{-ax_0 - cz_0 - d}{b} \Rightarrow$ Posso scegliere un qualunque valore per x_0 e z_0 , trovo sempre una soluzione particolare, $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Pi$.

ATTENZIONE! Non c'è una corrispondenza biunivoca tra piani dello spazio ed eq. lineari, in quanto due eq. distinte possono rappresentare un medesimo piano.

Es: (1) $ax + by + cz + d = 0$

(2) $\lambda ax + \lambda by + \lambda cz + \lambda d = 0 \quad (\lambda \neq 0)$

(1) e (2) hanno le stesse soluzioni.

CASI PARTICOLARI:

Sia Π il piano di eq. $ax + by + cz + d = 0$. Se qualcuno dei coefficienti a, b, c, d vale 0, allora il piano si trova in posizione particolare.

• Se $a = 0$, allora il piano è parallelo all'asse x . Infatti ogni punto dell'asse x è del tipo $(t, 0, 0)$ e, sostituendo le sue coordinate nell'eq. risulta:
 $0 \cdot t + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 0$. Se anche $d = 0$, l'uguaglianza è sempre vera e Π contiene l'asse x ; viceversa, se $d \neq 0$, l'uguaglianza è sempre falsa, cioè Π e l'asse x non hanno alcun punto in comune $\Rightarrow \Pi$ è parallelo all'asse x . Equivalentemente $\vec{n} \perp \vec{i}$:
 Infatti $\vec{n} \cdot \vec{i} = (0, b, c) \cdot (1, 0, 0) = 0$, cioè $\vec{n} \perp \vec{i}$.

• Analogamente: se $b = 0$, allora Π è parallelo all'asse y ;
 se $c = 0$, allora Π è parallelo all'asse z .

• Se due tra i coefficienti a, b, c sono nulli (e, per ciò, il 3° è non nullo), allora Π è parallelo a un piano coordinato. Ad es, se $a = 0$ e $b = 0$, allora Π è parallelo al piano xz (perché è parallelo agli assi x e z).

• Analogamente: se $a = 0$ e $c = 0$, allora Π è parallelo al piano xy ;
 se $b = 0$ e $c = 0$, allora Π è parallelo al piano yz .

• Se $d = 0$, l'eq. diventa $ax + by + cz = 0$ e allora (e solo allora), il piano contiene l'origine, ovvero $(0, 0, 0) \in \Pi$. Infatti $a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 = 0$.

• Se $d \neq 0$ possiamo sempre normalizzare l'eq. del piano: $\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} + \frac{z}{c'} = 1$,

Es: $2x - 3z + 7 = 0$

$$7 = -2x + 3z$$

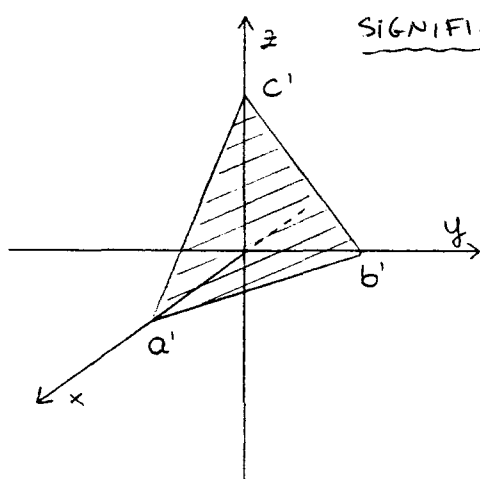
$$1 = -\frac{2x}{7} + \frac{3z}{7}$$

$$\frac{x}{-7/2} + \frac{z}{7/3} = 1$$

con la convenzione che un addendo non compare se la corrispondente coordinata delle giunte è eguale a zero.

Queste equazioni per Π è dette "forme normale".

$$\text{cioè: } \begin{cases} -\frac{7}{2} = a' = -\frac{d}{a} \\ \frac{7}{3} = c' = -\frac{d}{c} \end{cases}$$



SIGNIFICATO GEOMETRICO DI a', b', c' :

$\pi \cap$ asse z :

$$\begin{cases} \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} + \frac{z}{c'} = 1 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad z = c'$$

cioè $\pi \cap$ asse $z = (0, 0, c')$. Analogamente

$\pi \cap$ asse $y = (0, b', 0)$

$\pi \cap$ asse $x = (a', 0, 0)$.

Casi particolari: $z=0$ è il piano xy ;
 $x=0$ è il piano yz ;
 $y=0$ è il piano xz .

1.3.: I coefficienti a, b, c, d sono determinati a meno di un fattore di proporzionalità. Infatti, se $\lambda \neq 0$, l'eq. $\lambda ax + \lambda by + \lambda cz + \lambda d = 0$ rappresenta lo stesso piano dell'eq. $ax + by + cz + d = 0$, perché le due eq. hanno le stesse soluzioni. Cambiare i coefficienti in questo modo significa semplicemente scegliere un altro vettore normale, che è parallelo al primo.

Consideriamo due piani:

piano π : $ax + by + cz + d = 0$

piano π' : $a'x + b'y + c'z + d' = 0$

π e π' sono paralleli $\Leftrightarrow \vec{n}(a, b, c) \parallel \vec{n}'(a', b', c')$, cioè $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\begin{cases} a' = \lambda a \\ b' = \lambda b \\ c' = \lambda c \end{cases}$$

Se accade che $d' = \lambda d$, allora i due piani coincidono, altrimenti non hanno alcun punto in comune.

Es: π : $2x - 5y - 3z + 1 = 0$

π_1 : $6x - 15y - 9z + 3 = 0$

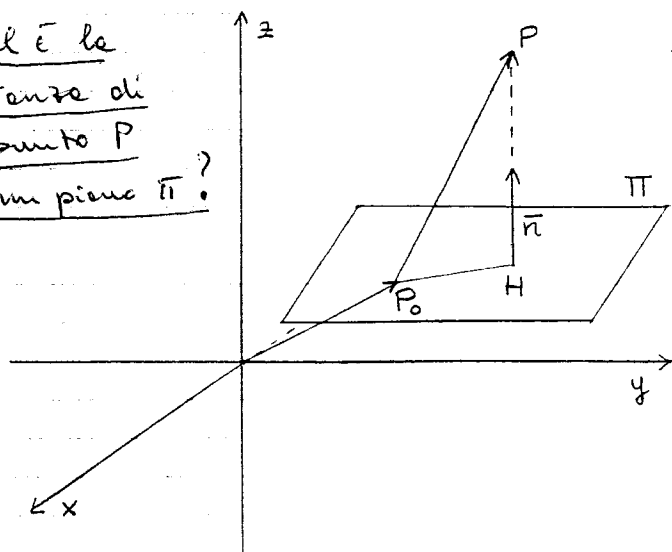
π_2 : $-2x + 5y + 3z + 1 = 0$

π_3 : $4x - 3y - 6z + 4 = 0$

π e π_1 sono lo stesso piano, mentre π_2 è parallelo e distinto, cioè non ha alcun punto in comune con i piani due. I piani π e π_3 sono incidenti, perché $4/2 \neq -3/-5$, cioè i coefficienti di x e y non sono proporzionali.

Nel piano Π di eq. $ax + by + cz + d = 0$ il vettore di (a, b, c) è quello di fornire un vettore $\perp$ al piano. Qual è, invece, il ruolo di d ? d esprime in qualche modo la distanza dall'origine, e cioè d è legato alla distanza del piano Π dall'origine degli assi.

Qual è la distanza di un punto P da un piano Π ?



$$P_0(x_0, y_0, z_0) \in \Pi$$

$$\bar{n}(a, b, c) \perp \Pi$$

$$P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

$$d(P, \Pi) = |\overline{HP}|$$

valore assoluto $\rightarrow$ $|\overline{P_0P} \cdot \bar{n}| = |\overline{P_0P}| |\bar{n}| \cos \alpha = |\overline{HP}| |\bar{n}|$ ← modulo

Quindi:

$$d(P, \Pi) = |\overline{HP}| = \frac{|\overline{P_0P} \cdot \bar{n}|}{|\bar{n}|}$$

$$d(P, \Pi) = \frac{|(x-x_0, y-y_0, z-z_0) \cdot (a, b, c)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} =$$

$$= \frac{|ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$P_0 \in \Pi, \text{ cioè } ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \Rightarrow d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$$

Quindi:

$$d(P, \Pi) = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

In particolare:

$$d(O, \Pi) = \frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

ESERCIZIO

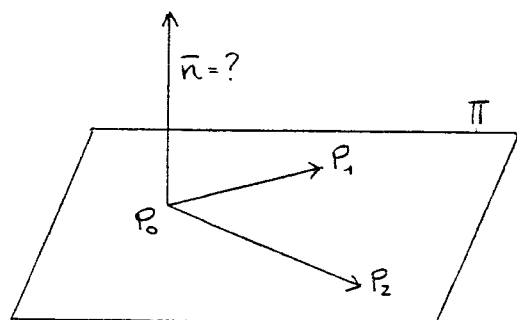
Siano dati 3 punti non allineati P_0, P_1, P_2 , e un 4° punto P .
Si determinino il piano Π individuato dai tre punti e la distanza di P da Π .

$$P_0 = (3, 5, 7) ; P_1 = (-1, 5, 2) ; P_2 = (-1, 2, 3)$$

$$P_0, P_1, P_2 \text{ non allineati} \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P_1} \nparallel \overrightarrow{P_0P_2}$$

$$(-4, 0, -5) \neq \lambda(-2, -3, -4) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{o.k.}$$

$$P = (0, 0, 1)$$



$$\bar{n} = (a, b, c) = ?$$

Si ha che:

$$\begin{cases} \bar{n} \cdot \overrightarrow{P_0P_1} = 0 \\ \bar{n} \cdot \overrightarrow{P_0P_2} = 0 \end{cases}$$

e da questo sistema si possono trovare soluzioni: $\bar{n} = (a, b, c)$.

Oppure, in alternativa, si può scegliere proprio

$$\bar{n} = \overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2}$$

$$\det \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -4 & 0 & -5 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix} = (0 - 15)\bar{i} + (-16 + 10)\bar{j} + (12 + 0)\bar{k} = (-15, -6, 12) = -3(5, 2, -4)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\bar{n}}$

Π è il piano per $P_0 \perp \bar{n}$.

$$5(x-3) + 2(y-5) - 4(z-7) = 0$$

$$5x - 15 + 2y - 10 - 4z + 28 = 0$$

$$5x + 2y - 4z + 3 = 0$$

$$d(P, \Pi) = \frac{|-4+3|}{\sqrt{5^2+2^2+(-4)^2}} = \frac{1}{\sqrt{45}} = \frac{1}{3\sqrt{5}}$$

Fascio di piani

Siano dati due piani Π_1 e Π_2 :

$$\Pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$\Pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

Allora:

$$\Pi_1 \cap \Pi_2 = \begin{cases} \emptyset & \text{se } \Pi_1 \parallel \Pi_2 \text{ con } \Pi_1 \neq \Pi_2 \\ \Pi_1 & \text{se } \Pi_1 = \Pi_2 \\ r & \text{retta dello spazio} \end{cases}$$

In altre parole il sistema ①:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

individua una retta se e solo se $(a_1, b_1, c_1) \nparallel (a_2, b_2, c_2)$.

Sia Π un piano di eq. $ax + by + cz + d = 0$.

Come si determina se Π appartiene al fascio di piani individuato da Π_1 e Π_2 , cioè al fascio di piani di supporto $r = \Pi_1 \cap \Pi_2$?

DEF: Data una retta r , si chiama fascio di piani l'insieme di tutti i piani contenenti r ; la retta r si chiama asse del fascio.

Consideriamo il sistema ②:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$$

Π appartiene al fascio di piani individuato da Π_1 e $\Pi_2 \Leftrightarrow$ il sistema ② ha per soluzione $r \Leftrightarrow$ i sistemi ① e ② hanno la medesima soluzione.

Ciò accade $\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che:

$$ax + by + cz + d = \lambda(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2z + d_2)$$

Pertanto $\boxed{\lambda(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0}$ è l'eq. del fascio individuato dai piani Π_1 e Π_2 . Al variare di λ e μ , essa descrive tutti gli infiniti piani appartenenti a tale fascio.

OSSERVAZIONE: I parametri λ e μ sono determinati a meno di un fattore moltiplicativo comune. Infatti, se $\kappa \neq 0$, sostituendo λ e μ rispettivamente con $\kappa\lambda$ e $\kappa\mu$, si ottiene lo stesso piano, perché in tal modo tutti i coefficienti dell'eq. risultano moltiplicati per κ .

ESERCIZIO

Si x soluzione del sistema:

$$\begin{cases} x + 4z - 5 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Determinare i piani Π per x che distano 1 dall'origine.

Il generico piano del fascio di rapporto x ha eq. del tipo:

$$\lambda(x + 4z - 5) + \mu(y + z - 1) = 0$$

$$\lambda x + \mu y + (4\lambda + \mu)z - (5\lambda + \mu) = 0$$

$$1 = d(0, \Pi) = \frac{|-(5\lambda + \mu)|}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + (4\lambda + \mu)^2}}$$

$$\lambda^2 + \mu^2 + 16\lambda^2 + 8\lambda\mu + \mu^2 = 25\lambda^2 + 10\lambda\mu + \mu^2$$

$$8\lambda^2 + 2\lambda\mu - \mu^2 = 0$$

Andiamo per λ^2 (dopo aver osservato che $\lambda = 0 \Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow$ nessun piano):

$$8 + 2\frac{\mu}{\lambda} - \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 = 0 \quad x = \frac{\mu}{\lambda}$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{1} = 1 \pm 3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\mu}{\lambda} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mu = 4\lambda \text{ oppure } \mu = -2\lambda$$

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = 2 \end{cases}$$

$$\Pi_1: x + 4z - 5 + 4y + 4z - 4 = 0 \Leftrightarrow x + 4y + 8z - 9 = 0$$

$$\Pi_2: -x - 4z + 5 + 2y + 2z - 2 = 0 \Leftrightarrow -x + 2y - 2z + 3 = 0$$

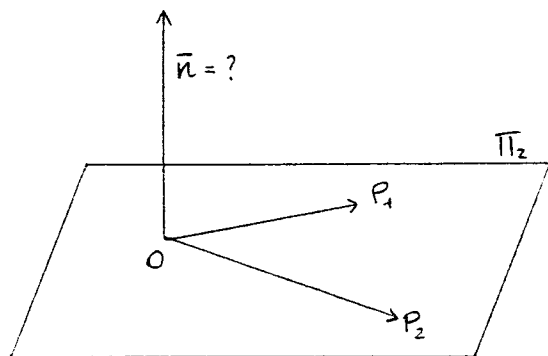
ESERCIZIO

Sia Π_1 il piano per $(-1, 0, 2)$ e $\perp$ al vettore $(1, 1, 1)$.

Sia Π_2 il piano per $O = (0, 0, 0)$, $P_1 = (0, 1, 0)$, $P_2 = (0, 0, -1)$.

Si dice se esistono piani per $\pi = \Pi_1 \cap \Pi_2$ che distano 1 dall'origine.

$$\Pi_1: 1(x+1) + 1(y-0) + 1(z-2) = 0 \Leftrightarrow x+1+y+z-2=0 \Leftrightarrow x+y+z-1=0$$



$$\overline{OP_1} = (0, 1, 0)$$

$$\overline{OP_2} = (0, 0, -1)$$

$$\bar{n} = \overline{OP_1} \times \overline{OP_2} = \det \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1-0)\bar{i} + (0-0)\bar{j} + (0-0)\bar{k} = (-1, 0, 0)$$

$\Pi_2: -x=0 \Leftrightarrow x=0$ Π_2 è il piano coordinato yz

Eq. del fascio di piani individuato da Π_1 e Π_2 :

$$\lambda(x+y+z-1) + \mu x = 0$$

$$\lambda x + \lambda y + \lambda z - \lambda + \mu x = 0$$

$$(\lambda + \mu)x + \lambda y + \lambda z - \lambda = 0$$

$$1 = d(O, \pi) = \frac{|-\lambda|}{\sqrt{(\lambda + \mu)^2 + \lambda^2 + \lambda^2}}$$

$$\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu + \lambda^2 + \lambda^2 = \lambda^2$$

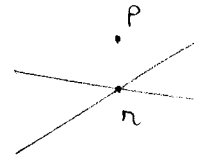
$$2\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2 = 0$$

$$2 + 2\frac{\mu}{\lambda} + \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 = 0 \quad x = \frac{\mu}{\lambda}$$

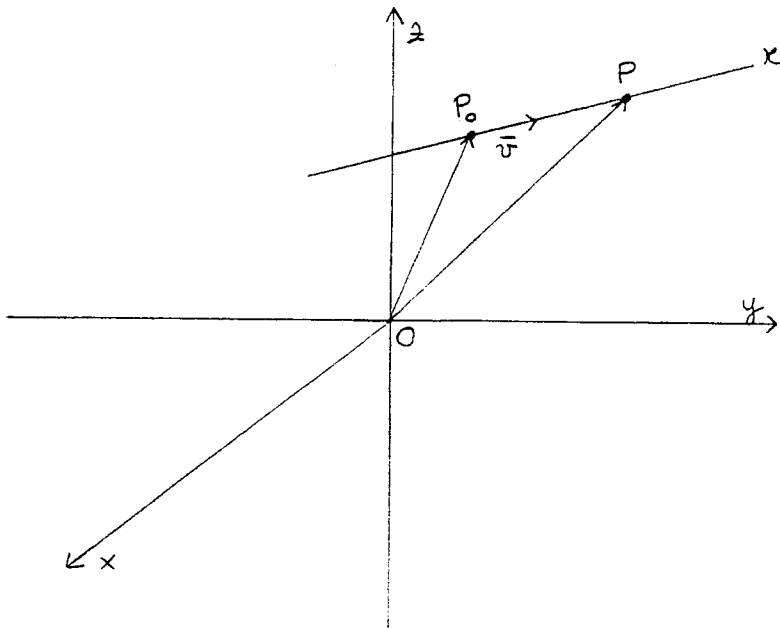
$$2 + 2x + x^2 = 0$$

$$x^2 + 2x + 2 = 0 \quad \Delta < 0 \quad \text{No soluz.}$$

N.B.: Perché esista Π di supporto x con $d(P, \Pi) = d$, occorre che $d(P, x) \geq d$.
 Infatti: $d(P, x) = d \Leftrightarrow \Delta = 0$
 $d(P, x) > d \Leftrightarrow \Delta > 0$
 $d(P, x) < d \Leftrightarrow \Delta < 0$



Retta nello spazio



Per individuare una retta x basta conoscere un suo punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e la sua direzione, che può essere assegnata mediante un vettore non nullo $\vec{v} = (e, m, n)$.

$$P = (x, y, z)$$

$$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\vec{v} = (e, m, n)$$

$P_0 \in x$ scelto; $\vec{v} \parallel x$ scelto.

Se $P \in \mathbb{R}^3$, allora $P \in x \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda \vec{v} \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}$.

Cioè, usando le coordinate:

$$P \in x \Leftrightarrow (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(e, m, n) = (x_0 + \lambda e, y_0 + \lambda m, z_0 + \lambda n)$$

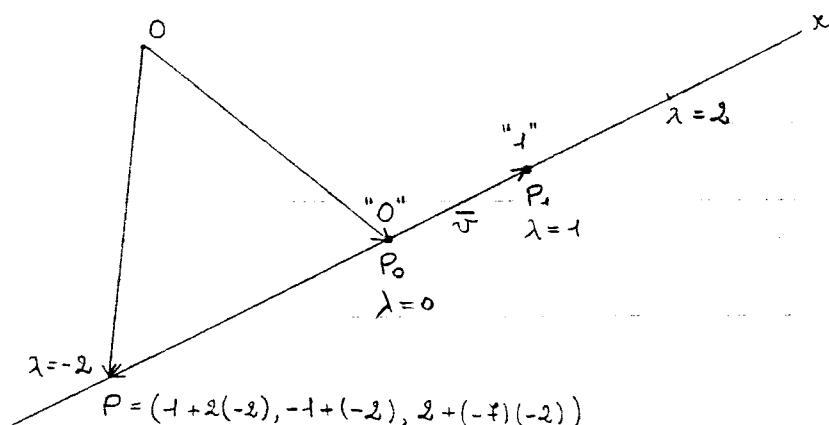
Si ottiene, così, una equazione parametrica di x :

$$x \begin{cases} x = x_0 + e\lambda \\ y = y_0 + m\lambda \\ z = z_0 + n\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

ESEMPIO

Scriviamo eq.^m parametriche della retta π passante per $P_0 = (1, -1, 2)$ e $P_1 = (3, 0, -5)$.

Fissiamo $\vec{v} \parallel \pi$ dato da $\vec{v} = \overrightarrow{P_0 P_1} = (2, 1, -7)$



Otteniamo:

$$\pi \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 2 + (-7)\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda \vec{v}$$

λ rappresenta la coordinata ascissa del punto della retta, una volta che sono stati fissati P_0 come origine e $\overrightarrow{P_0 P_1} = 1$ (vettore unitario).

I punti della retta sono tutti e solo i $P_\lambda = (1 + 2\lambda, -1 + \lambda, 2 - 7\lambda)$.

Ad es., se scelgo $\lambda = -1$, ottengo $P_{-1} = (-1, -2, 9) \in \pi$.

Posiamo anche prendere un altro vettore $\vec{u} \parallel \pi$, ad es. $\vec{u} = -3\vec{v}$, con lo ancora:

$$\pi \begin{cases} x = -1 - 6\lambda \\ y = -2 - 3\lambda \\ z = 9 + 21\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Ci sono infinite eq.^m parametriche che definiscono la stessa retta.

Come si passa dalla forma cartesiana alla forma parametrica?

Ovvero, come ottenere una rappresentazione parametrica per $\pi = \pi_1 \cap \pi_2$?

Facciamo un es. concreto:

$$\pi \begin{cases} x - 2y + z + 3 = 0 \\ -x + y + 2z + 4 = 0 \end{cases}$$

1) 1° METODO: cerco di trovare un sistema equivalente dove una delle due eq.ⁿⁱ abbia al più 2 incognite.

Faccio la somma delle 2 eq.ⁿⁱ e ottengo il nuovo sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + z + 3 = 0 \\ -y + 3z + 7 = 0 \end{cases}$$

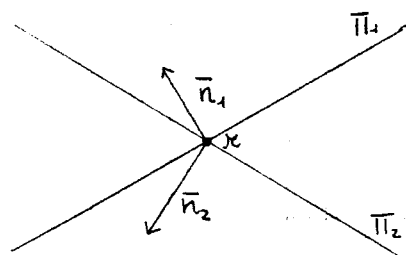
Chiamo $z = \lambda$:

$$\begin{cases} y = 7 + 3\lambda \\ x = 2y + z - 3 = 14 + 6\lambda - \lambda - 3 = 11 + 5\lambda \end{cases}$$

cioè:

$$\pi \begin{cases} x = 11 + 5\lambda \\ y = 7 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

2) 2° METODO: Mi servono - un punto di π , cioè una soluzione particolare del sistema $\pi = \pi_1 \cap \pi_2$;
- un vettore $\parallel \pi$, che ottengo come prodotto vettoriale dei due vettori $\perp$ a π_1 e π_2 rispettivamente.



Dato che x giace su π_1 , essa è $\perp$ a $\bar{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, vettore normale a π_1 ; similmente, dato che giace anche su π_2 , la retta x è $\perp$ a $\bar{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$, vettore normale a π_2 . Ma, al pari di x , anche il prodotto vettoriale $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2$ è $\perp$ tanto a $\bar{n}_1$ quanto a $\bar{n}_2$ e, perciò, può essere preso come vettore direzione di x .

$$P_0 = (11, 7, 0)$$

$$\bar{v} = (1, -2, 1) \times (-1, 1, 2) = \det \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (-5, -3, -1)$$

$$x \begin{cases} x = 11 - 5\lambda \\ y = 7 - 3\lambda \\ z = 0 - \lambda \end{cases}$$

Come si passa dalla forma parametrica alla forma cartesiana?

Oppure, data x in forma parametrica, come trovo π_1 e π_2 tali che $x = \pi_1 \cap \pi_2$?

Facciamo un es. concreto:

$$x \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 3 \\ z = 7 - 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = \lambda \\ y = 3 \\ 7-z = 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+1) = 7-z \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \begin{cases} 2x + z - 5 = 0 \\ y = 3 \end{cases}$$

Basta, quindi, eliminare λ .

ESERCIZIO

Tra i piani di supporto:

$$x \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2+t \\ z = 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Si determini $\begin{cases} \pi_1 \text{ passante per l'origine} \\ \pi_2 \parallel \text{asse } x \end{cases}$

Scriviamo x come intersezione di due piani:

$$x \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2+t \\ z = 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x = y-2 \Rightarrow x+y-3=0 \\ z = 3y-6 \Rightarrow 3y-z-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow x \begin{cases} x+y-3=0 \\ 3y-z-6=0 \end{cases}$$

Eq. del fascio di piani di supporto x :

$$\lambda(x+y-3) + \mu(3y-z-6) = 0 \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\lambda x + \lambda y - 3\lambda + 3\mu y - \mu z - 6\mu = 0$$

$$\lambda x + (\lambda + 3\mu)y - \mu z - 3(\lambda + 2\mu) = 0$$

$$\pi_1 \text{ passa per } 0 \Leftrightarrow \lambda + 2\mu = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2\mu \quad \begin{cases} \lambda = -2\mu \\ \mu = 1 \end{cases}$$

$$\pi_1: -2x + y - z = 0$$

L'asse x è $\parallel$ a $\vec{i} = (1, 0, 0)$.

$$\text{Allora } \pi_2 \parallel \vec{i} \Leftrightarrow (\lambda, \lambda + 3\mu, -\mu) \perp (1, 0, 0) \Leftrightarrow (\lambda, \lambda + 3\mu, -\mu) \cdot (1, 0, 0) = 0 \Leftrightarrow$$

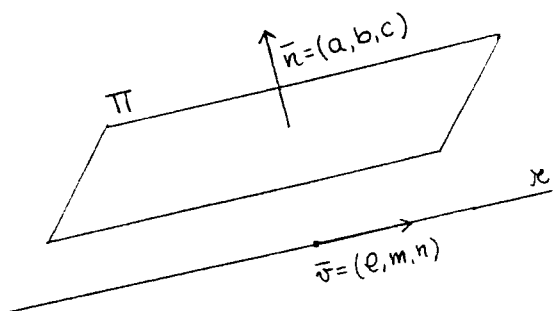
$$\Leftrightarrow \lambda + 0 + 0 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 1 \end{cases} \Rightarrow \pi_2: 3y - z - 6 = 0$$

Riassumendo:

$$\pi_1: -2x + y - z = 0$$

$$\pi_2: 3y - z - 6 = 0$$

N.B.: Condizione di parallelismo e perpendicolarità tra rette e piani:



$$r // \pi \Leftrightarrow (a, b, c) \cdot (e, m, n) = 0, \text{ ovvero}$$

$$(a, b, c) \perp (e, m, n)$$

$$r \perp \pi \Leftrightarrow (a, b, c) // (e, m, n)$$

Mutua posizione di due rette nello spazio

r e s possono essere

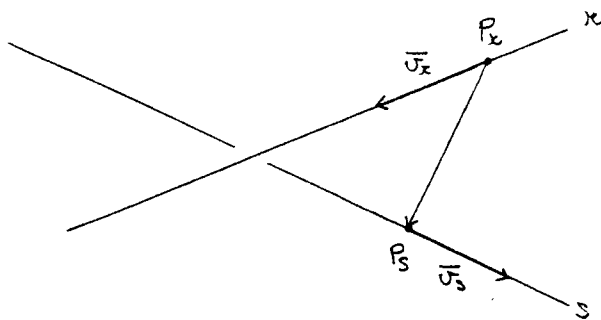
- complanari ($\exists \pi$ piano che le contiene entrambe)
- non complanari (sghembe)

Le rette complanari possono essere:

- incidenti
- parallele
 - uguali
 - distinte

Come possiamo controllare se r e s sono complanari?

N.B.: $r \cap s = \emptyset \Leftrightarrow r // s$ oppure r e s sono sghembe $\Rightarrow$ per studiare la complanarità di due rette non basta cercare l'intersezione.



r e s sono complanari $\Leftrightarrow \vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r P_s}$ sono complanari $\Leftrightarrow \overrightarrow{P_r P_s} \cdot (\vec{v}_r \times \vec{v}_s) = 0$ (il volume del tetraedro è 0).

$$r \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad s \begin{cases} x - y - z + 1 = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$$

Come sono r e s tra loro?

$$P_r = (0, 1, 2)$$

$$\vec{v}_r = (3, -1, 1)$$

$$s \begin{cases} x = u \\ y = u + 2u + 1 = 1 + 3u \\ z = -2u \end{cases}$$

$$P_s = (0, 1, 0)$$

$$\vec{v}_s = (-1, 3, -2)$$

$$\overrightarrow{P_r P_s} = (0, 0, -2)$$

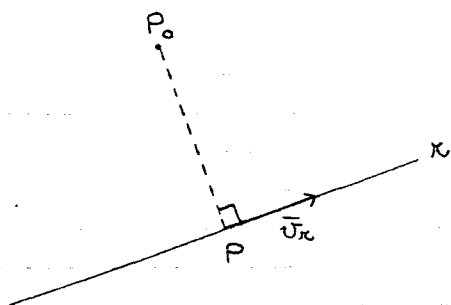
$$\overrightarrow{P_r P_s} \cdot (\vec{v}_r \times \vec{v}_s) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} = -2(9+1) = -20 \neq 0 \Rightarrow r \text{ e } s \text{ sono sghembe}$$

Distanze

• DISTANZA PUNTO-PIANO

$$d(P, \pi) = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

• DISTANZA PUNTO-RETTA



Dati una retta r e un punto P_0 , hai P la proiezione ortogonale di P_0 su r .
Chiamiamo distanza di P_0 da r e lo es-
presso del segmento P_0P , ovvero il modulo
del vettore $\overrightarrow{P_0P}$.

a) 1° METODO: - Si trova il piano π che passa per P_0 e che è $\perp$ a r .

- Si trova $P = \pi \cap r$.

$$- d(P_0, r) = |\overrightarrow{P_0P}|$$

b) 2° METODO: P dipende da un parametro λ (rappresentazione parametrica di π).

- si trova λ_0 tale che $\overline{P_0 P(\lambda_0)}$ ha $\perp$ a $\pi \Rightarrow$ si impone la condizione di perpendicolarità tra i vettori $\overline{P_0 P(\lambda_0)}$ e $\vec{v} = (e, m, n)$, direzione di π .
Tale condizione, data da $\overline{P_0 P(\lambda_0)} \cdot \vec{v} = 0$, determina il valore del parametro λ_0 che corrisponde al punto P . Si ha, quindi,:
 $(x + e\lambda - x_0, y + m\lambda - y_0, z + n\lambda - z_0) \cdot (e, m, n) = 0$.

c) 3° METODO: si minimizza la funzione $|\overline{P_0 P(\lambda_0)}|$.

ESEMPIO

$$\pi \begin{cases} x = 5\lambda \\ y = -1 - 3\lambda \\ z = 2 + 7\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$P_0 = (-5, 1, 0) \notin \pi$$

1° metodo:

$$\pi \perp x \Leftrightarrow (a, b, c) \parallel (e, m, n)$$

$$\pi \text{ ha eq.}^{\text{ne}}: 5(x+5) - 3(y-1) + 7z = 0$$

$$5x + 25 - 3y + 3 + 7z = 0$$

$$5x - 3y + 7z + 28 = 0$$

La proiezione di P_0 su π è il punto $P = \pi \cap x$.

$P = \pi \cap x$ è il punto su π che ha ascissa λ tale che:

$$5(5\lambda) - 3(-1 - 3\lambda) + 7(2 + 7\lambda) + 28 = 0$$

$$25\lambda + 3 + 9\lambda + 14 + 49\lambda + 28 = 0$$

$$83\lambda + 45 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{45}{83}$$

$$P = \left(-\frac{225}{83}, \frac{52}{83}, -\frac{149}{83} \right)$$

$$d = \sqrt{\left(-\frac{225}{83} + 5 \right)^2 + \left(\frac{52}{83} - 1 \right)^2 + \left(-\frac{149}{83} \right)^2}$$

2° metodo:

Dato $P = (5\lambda, -1 - 3\lambda, 2 + 7\lambda) \in \pi$, imponiamo la condizione $\overline{P_0 P} \cdot \vec{v}_\pi = 0$:

$$(5\lambda + 5, -1 - 3\lambda - 1, 2 + 7\lambda) \cdot (5, -3, 7) = 0$$

$$\text{cioè } 5(5\lambda + 5) + 3(3\lambda + 2) + 7(2 + 7\lambda) = 0$$

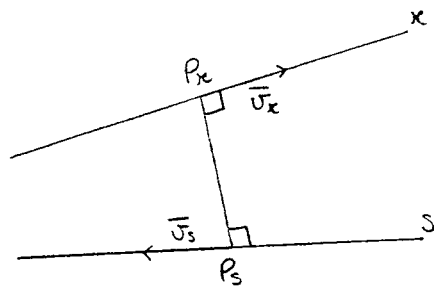
si trova $\lambda = -\frac{45}{83}$ e si prosegue come nel 1° metodo.

DISTANZA TRA DUE RETTE

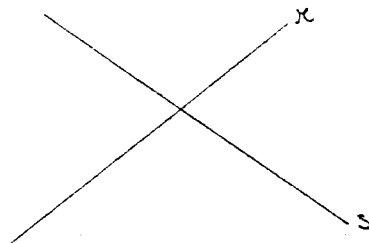
Consideriamo due rette x e s con vettori direttori $\vec{v}_x = (e_x, m_x, n_x)$ e $\vec{v}_s = (e_s, m_s, n_s)$:

$$x \begin{cases} x = x_x + e_x \lambda \\ y = y_x + m_x \lambda \\ z = z_x + n_x \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad s \begin{cases} x = x_s + e_s \mu \\ y = y_s + m_s \mu \\ z = z_s + n_s \mu \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

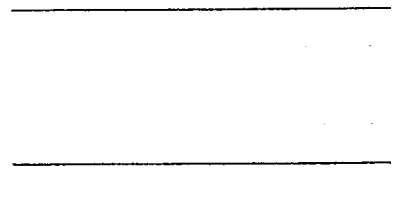
La distanza di x da s è la lunghezza di un segmento $\perp$ a entrambe le rette che congiunge un punto di x con un punto di s .



x e s sghembe



x e s coincidenti
($d=0$)



x e s parallele
(∞ vettori $\overline{P_x P_s} \perp x$ e s)

1° METODO (funziona sempre!):

- Scrivo eq.ⁿⁱ parametriche sia per x che per s (λ parametro di x , μ parametro di s).

- Impongo che $\overline{P(\lambda)P(\mu)} \cdot \vec{v}_x = 0$ e $\overline{P(\lambda)P(\mu)} \cdot \vec{v}_s = 0$
 $\uparrow$ punto su x $\uparrow$ punto su s

- $d(x, s) = |\overline{P(\lambda)P(\mu)}|$

Esempio:

$$x \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases} \quad s \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = 3 \\ z = 2 + \mu \end{cases}$$

$$P_x = (0, 1, -2)$$

$$P_s = (1, 3, 2)$$

$$\vec{v}_x = (1, 1, -1)$$

$$\vec{v}_s = (-1, 0, 1)$$

$$\overline{P_x P_s} = (1, 2, 4)$$

$$\overline{P_x P_s} \cdot (\vec{v}_x \times \vec{v}_s) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1(1) - 2(1-1) + 4(0+1) = 1+4=5 \neq 0$$

x e s sono sghembe.

$$P(\lambda) = (\lambda, 1+\lambda, -2-\lambda)$$

$$P(\mu) = (1-\mu, 3, 2+\mu)$$

$$\overline{P(\lambda)P(\mu)} = P(\mu) - P(\lambda) = (1-\mu-\lambda, 3-1-\lambda, 2+\mu+2+\lambda) = (1-\mu-\lambda, 2-\lambda, 4+\mu+\lambda)$$

Impongo:

$$\begin{cases} (1-\mu-\lambda, 2-\lambda, 4+\mu+\lambda) \cdot (1, 1, -1) = 0 \\ (1-\mu-\lambda, 2-\lambda, 4+\mu+\lambda) \cdot (-1, 0, 1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1-\mu-\lambda+2-\lambda-4-\mu-\lambda=0 \\ -1+\mu+\lambda+4+\mu+\lambda=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1-\mu-\lambda+2-\lambda-4-\mu-\lambda=0 \\ -1+\mu+\lambda+4+\mu+\lambda=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1-\mu-\lambda+2-\lambda-4-\mu-\lambda=0 \\ -1+\mu+\lambda+4+\mu+\lambda=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda=2 \\ 2\mu+2\lambda+3=0 \Rightarrow 2\mu+4+3=0 \Rightarrow \mu=-7/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda=2 \\ 2\mu+2\lambda+3=0 \Rightarrow 2\mu+4+3=0 \Rightarrow \mu=-7/2 \end{cases}$$

$$d(x, s) = |\overline{P(\lambda)P(\mu)}| = \sqrt{(1+7/2-2)^2 + (2-2)^2 + (4-7/2+2)^2} = \sqrt{25/4 + 25/4} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

1) 2° METODO (funziona solo se $x \nparallel s$):

- Si sceglie nel fascio di supporto x quel piano π che risulta $\parallel$ a s , imponendo $\vec{v}_3 \perp \vec{n}$

$$d(x, s) = d(s, \pi) = d(P_s, \pi).$$

Esempio:

$$x \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = -2-\lambda \end{cases} \quad s \begin{cases} x = 1-\mu \\ y = 3 \\ z = 2+\mu \end{cases}$$

$$x \begin{cases} x = y-1 \\ x = -z-2 \end{cases} \Leftrightarrow x \begin{cases} x-y+1=0 \\ \boxed{x+z+2=0} \end{cases} \swarrow \pi \parallel s$$

$$\text{Eq.}^{\text{a}} \text{ fascio: } \alpha(x-y+1) + \beta(x+z+2) = 0$$

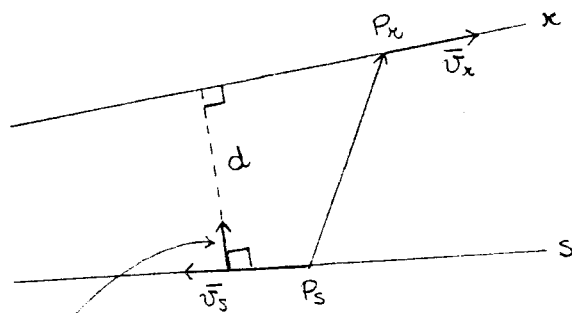
$$\alpha x - \alpha y + \alpha + \beta x + \beta z + 2\beta = 0$$

$$(\alpha + \beta)x - \alpha y + \beta z + \alpha + 2\beta = 0$$

$$\pi \parallel s \Leftrightarrow (\alpha + \beta, -\alpha, \beta) \cdot (-1, 0, 1) = 0 \Leftrightarrow -\alpha - \beta + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

$$d(x, s) = d(P_s, \pi) = \frac{|1+2+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

c) 3° METODO (funziona solo se $x \nparallel s$):

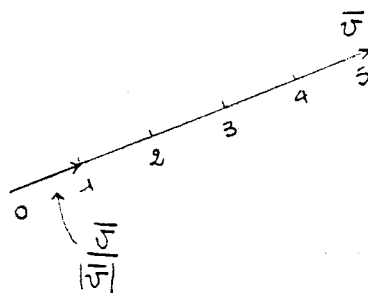


$\overrightarrow{P_s P_x} \cdot (\overrightarrow{v_x} \times \overrightarrow{v_s}) = \text{vettore } \parallel \text{ alla retta per } d \text{ (} d \perp \text{ sia a } \overrightarrow{v_x} \text{ che a } \overrightarrow{v_s} \text{)}$

$\overrightarrow{P_s P_x} \cdot \frac{\overrightarrow{v_x} \times \overrightarrow{v_s}}{|\overrightarrow{v_x} \times \overrightarrow{v_s}|} = d$ La proiezione di $\overrightarrow{P_s P_x}$ sulla direzione del vettore è d .

* vettore
(vettore lungo 1)

$$\frac{\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|} = \frac{(5, -1, 3)}{\sqrt{5^2 + 1^2 + 3^2}} = \left(\frac{5}{\sqrt{35}}, -\frac{1}{\sqrt{35}}, \frac{3}{\sqrt{35}} \right) = \overline{u}$$



Se le rette sono $\parallel$, $\overrightarrow{v_x} \parallel \overrightarrow{v_s} \Rightarrow \overrightarrow{v_x} \times \overrightarrow{v_s} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{v_x} \times \overrightarrow{v_s} = \det \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_x & y_x & z_x \\ x_s & y_s & z_s \end{pmatrix}$$

Esempio:

$$x \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases} \quad s \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = 3 \\ z = 2 + \mu \end{cases}$$

$$\overrightarrow{v_x} \times \overrightarrow{v_s} = \det \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1, 0, 1)$$

$$|\overrightarrow{v_x} \times \overrightarrow{v_s}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{P_x P_s} \cdot (\overrightarrow{v_x} \times \overrightarrow{v_s}) = (-1, 2, 4) \cdot (1, 0, 1) = -1 + 4 = 3$$

$$d = \overrightarrow{P_x P_s} \cdot \frac{\overrightarrow{v_x} \times \overrightarrow{v_s}}{|\overrightarrow{v_x} \times \overrightarrow{v_s}|} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

N.B.: Se $x \parallel s$, si può calcolare $d(x, s) = d(P_x, s)$, dove $P_x \in x$ fissato.

DISTANZA RETTA - PIANO

$$\text{Dati } x \text{ e } \pi \begin{cases} x \in \pi \Rightarrow d=0 \\ x \parallel \pi \Rightarrow \text{si prende } P_x \in x \text{ e si fa } d(x, \pi) = d(P_x, \pi) \\ x \cap \pi = P \Rightarrow d=0 \end{cases}$$

DISTANZA PIANO - PIANO

$$\text{Dati } \pi_1 \text{ e } \pi_2, \pi_1 \cap \pi_2 = \begin{cases} \pi_1 \text{ (contenuto)} \Rightarrow d=0 \\ x \Rightarrow d=0 \\ \emptyset \Leftrightarrow \pi_1 \parallel \pi_2 \Rightarrow \text{si prende } P_1 \in \pi_1 \text{ e si fa } d(\pi_1, \pi_2) = d(P_1, \pi_2) \end{cases}$$

ESERCIZIO

$$P(1, 0, -1) \notin x$$

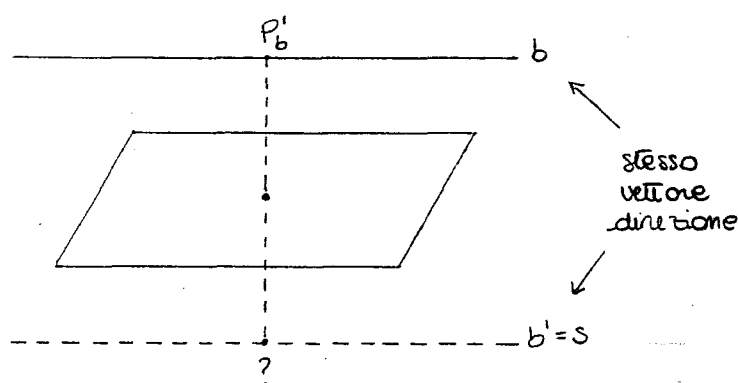
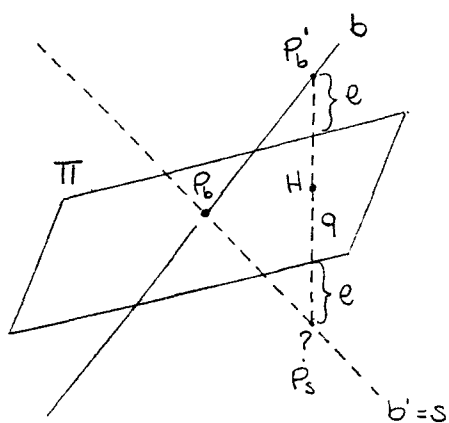
$$x \begin{cases} x = 2-t \\ y = -1+t \\ z = 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

π piano contenente P e x .

Determinare la retta s simmetrica alla bisettrice del 1° diante rispetto al piano π (lo spazio bidimensionale e' diviso in quadranti, quello tridimensionale in dianti).

La bisettrice del 1° diante e' una retta che passa per O ed e' $\parallel (1, 1, 1)$:

$$b \begin{cases} x = u \\ y = u \\ z = u \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}$$



E' cruciale trovare il punto simmetrico a P_b rispetto al piano.

Il piano Π :

$$x \begin{cases} 2-x=y+1 \Rightarrow x+y-1=0 \\ z=2y+2 \Rightarrow 2y-z+2=0 \end{cases} \quad x \begin{cases} \boxed{x+y-1=0} \\ 2y-z+2=0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \swarrow \text{Π è questo} \end{matrix}$$

$$\Pi: \lambda(x+y-1) + \mu(2y-z+2) = 0$$

$$\lambda x + \lambda y - \lambda + 2\mu y - \mu z + 2\mu = 0$$

$$\lambda x + (\lambda + 2\mu)y - \mu z + (2\mu - \lambda) = 0$$

$$P \in \Pi \Leftrightarrow \lambda + \mu + 2\mu - \lambda = 0 \Leftrightarrow \mu = 0, \lambda = 1$$

$\vec{v}$ = vettore direttore della bisettrice

$\vec{n}$ = vettore normale a Π

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = (1, 1, 1) \cdot (1, 1, 0) = 1 + 1 = 2 \neq 0 \quad \text{La bisettrice non è // a } \Pi, \text{ ma lo interseca}$$

$$b \cap \Pi \begin{cases} x = \mu \\ y = \mu \\ z = \mu \\ x + y - 1 = 0 \Rightarrow \mu + \mu - 1 = 0 \Rightarrow 2\mu = +1 \Rightarrow \mu = 1/2 \end{cases}$$

$$b \cap \Pi = P_b = (1/2, 1/2, 1/2)$$

Si q la retta passante per P'_b e $\perp$ a Π : ($P'_b = (1, 1, 1)$):

$$q \begin{cases} x = 1 + v \\ y = 1 + v \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{poiché } \vec{n}_\Pi = (1, 1, 0)$$

Utilizziamo la coordinata ascissa, prendendo P'_b come origine.
L'ascissa v_0 su q che fornisce il punto $H = q \cap \Pi$ è data da:

$$q \cap \Pi \begin{cases} x = 1 + v \\ y = 1 + v \\ z = 1 \\ x + y - 1 = 0 \Rightarrow 1 + v + 1 + v - 1 = 0 \Rightarrow 2v = -1 \Rightarrow v = -1/2 \end{cases}$$

Se H ha ascissa $-1/2$ su q , P_3 avrà ascissa $-\frac{1}{2} \cdot 2 = -1$.

Se nelle eq.^{ue} parametriche di q metto $v = -1$, ottengo $P_3 = (0, 0, 1)$.

S è la retta passante per P_3 e P_b :

$$P_3 = (0, 0, 1)$$

$$P_b = (1/2, 1/2, 1/2)$$

$$\overrightarrow{P_3 P_b} = (1/2, 1/2, -1/2)$$

$$S \begin{cases} x = 0 + 1/2 \lambda \\ y = 0 + 1/2 \lambda \\ z = 1 - 1/2 \lambda \end{cases} \quad \text{ovvero } S \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

Determinare eq.ⁿⁱ per la retta r passante per $P = (1, 2, -3)$ e incidente le due rette:

$$S_1 \begin{cases} x = z + 1 \\ y = 2z - 1 \end{cases}$$

$$S_2 \begin{cases} x = z + 2 \\ y = z - 1 \end{cases}$$

TRUCCHETTO: Necessariamente r sarà compresaria a S_1 e sarà compresaria a S_2 (poiché due rette incidenti individuano sempre un piano) $\Rightarrow r$ sta sia sul piano Π_1 contenente P e S_1 che sul piano Π_2 contenente P e S_2 .

$$S_1 \begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$S_2 \begin{cases} x - z - 2 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Pi_1: \lambda(x - z - 1) + \mu(y - 2z + 1) = 0$$

$$\lambda x - \lambda z - \lambda + \mu y - 2\mu z + \mu = 0$$

$$\lambda x + \mu y - (\lambda + 2\mu)z + \mu - \lambda = 0$$

$$P \in \Pi_1 \Leftrightarrow \lambda + 2\mu + 3(\lambda + 2\mu) + \mu - \lambda = 0$$

$$\lambda + 2\mu + 3\lambda + 6\mu + \mu - \lambda = 0$$

$$3\lambda + 9\mu = 0 \Leftrightarrow \lambda + 3\mu = 0$$

$$\begin{cases} \lambda = -3 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

$$\Pi_1: -3x + y + z + 4 = 0 \Leftrightarrow 3x - y - z - 4 = 0$$

$$\Pi_2: \lambda(x - z - 2) + \mu(y - z + 1) = 0$$

$$\lambda x - \lambda z - 2\lambda + \mu y - \mu z + \mu = 0$$

$$\lambda x + \mu y - (\lambda + \mu)z + \mu - 2\lambda = 0$$

$$P \in \Pi_2 \Leftrightarrow \lambda + 2\mu + 3(\lambda + \mu) + \mu - 2\lambda = 0$$

$$\lambda + 2\mu + 3\lambda + 3\mu + \mu - 2\lambda = 0$$

$$2\lambda + 6\mu = 0 \Leftrightarrow \lambda + 3\mu = 0$$

$$\begin{cases} \lambda = -3 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

$$\Pi_2: -3x + y + 2z + 1 + 6 = 0 \Leftrightarrow 3x - y - 2z - 7 = 0$$

Π_1 e Π_2 non sono $\parallel$, ma individuano una retta, r :

$$r \begin{cases} 3x - y - z - 4 = 0 \\ 3x - y - 2z - 7 = 0 \end{cases}$$

Bisogna controllare che $r \nparallel s_1$ e $r \nparallel s_2$:

$$s_1 \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{cases}$$

$$s_2 \begin{cases} x = 2 + u \\ y = -1 + u \\ z = u \end{cases}$$

$$\vec{v}_1 = (1, 2, 0)$$

$$\vec{v}_2 = (1, 1, 1)$$

$$r \begin{cases} x = v \\ y = -1 + 3v \\ z = -3 \end{cases}$$

$$\vec{v}_r = (1, 3, 0)$$

$$\vec{v}_r \nparallel \vec{v}_1, \vec{v}_r \nparallel \vec{v}_2$$

ESERCIZIO

Siano date due rette r e s :

- r è l'asse delle x ;
- s è la retta per $A = (0, 1, 0)$ e $\parallel \vec{u} = (1, 1, 1)$.

Determinare:

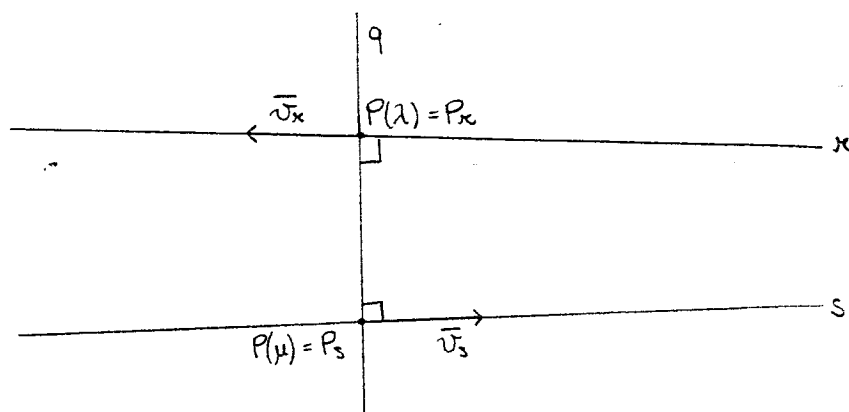
- Una retta q incidente e $\perp$ sia a r che a s .
- Se $\exists q'$ incidente sia a r che a s e $\parallel \vec{v} = (0, 1, 1)$.

$$a) r \parallel \vec{v}_r = (1, 0, 0)$$

$$s \parallel \vec{v}_s = (1, 1, 1)$$

$\vec{v}_r \times \vec{v}_s$ = vettore $\perp$ sia a $\vec{v}_r$ che a $\vec{v}_s$ = vettore direzione della retta q

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (0, -1, 1)$$



$$x \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad s \begin{cases} x = \mu \\ y = 1 + \mu \\ z = \mu \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

$$P(\lambda) = (\lambda, 0, 0)$$

$$P(\mu) = (\mu, 1 + \mu, \mu)$$

$$\overline{P(\lambda)P(\mu)} = P(\mu) - P(\lambda) = (\mu - \lambda, 1 + \mu, \mu)$$

$$\overline{P(\lambda)P(\mu)} \perp \bar{v}_x \text{ e } \overline{P(\lambda)P(\mu)} \perp \bar{v}_s:$$

$$\begin{cases} \overline{P(\lambda)P(\mu)} \cdot \bar{v}_x = 0 \\ \overline{P(\lambda)P(\mu)} \cdot \bar{v}_s = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\mu - \lambda, 1 + \mu, \mu) \cdot (1, 0, 0) = 0 \\ (\mu - \lambda, 1 + \mu, \mu) \cdot (1, 1, 1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu - \lambda = 0 \Leftrightarrow \mu = \lambda \\ \mu - \lambda + 1 + \mu + \mu = 0 \Leftrightarrow 3\mu - \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow 3\mu - \mu + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\mu = -1 \Leftrightarrow \mu = -1/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = -1/2 \\ \mu = -1/2 \end{cases}$$

$$P_x = P(\lambda) = (-1/2, 0, 0)$$

$$P_s = P(\mu) = (-1/2, 1/2, -1/2)$$

la retta q passa per P_x e ha direzione $(0, -1, 1)$:

$$q \begin{cases} x = -1/2 \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$$

q' = retta per P_x e P_s tale che $\overline{P_x P_s} \parallel \bar{v} = (0, 1, 1)$, uol.:

$$(\mu - \lambda, 1 + \mu, \mu) = \lambda(0, 1, 1) \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \mu - \lambda = 0 \\ 1 + \mu = \lambda \\ \mu = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \lambda \\ 1 + \mu = \mu \Leftrightarrow 1 = 0 \text{ NO!} \end{cases} \quad \nexists q'$$